L'endemà de la mort de Poincaré, Painlevé parlava així (*Le Temps*, 18 juliol 1912):

«Amb el gran matemàtic francès se'n va l'únic home capaç d'encloure en sa pensa totes les altres, d'entendre fins al més pregon, i per una mena de descoberta renovada, tot ço que la intel·ligència humana pot avui compendre. Per això aquesta desaparició prematura en plena força intel·lectual és un desastre.

Moltes descobertes es retardaran, moltes temptatives es perllongaran, perquè el cervell potent i lluminós ja no hi serà per a relacionar recerques que ignorem, o per a llançar, en el cúmul de fets obscurs bruscament revelats per l'experiència, el cop d'escandall atrevit d'una nova teoria.»

Aquestes paraules reflecteixen tot ço que hi ha de pregonament universal en l'obra científica de Poincaré. Ens demostren per què un anàlisi d'aquesta obra ha d'èsser concebut ben altrament que qualsevulla estudi semblant.

Quan hom parla d'un literat, d'un novel·lista, d'un artista, la primera tasca de qui analitza la seva obra és la de cercar-ne la idea directriu, la tendència general.

No podem pas fer-ho amb Poincaré. Les condicions són enterament distintes quan es tracta d'un savi tan esplendent com ell.

L'Art i la Ciència manifesten en aquest punt una diferència remarcable.

En l'obra d'Art cerquem sempre la personalitat de l'artista: és aquesta personalitat la que apareix a través de l'assumpte que tracta.

En l'obra del savi no hi ha, o no hi hauria d'haver, res d'això.

Tinguí el goig i l'honor de tractar Hermite quan tot just era jo un estudiantet, i recordo que em deia, en aquell to de predicador que tenia costum d'adoptar: «Car amic, ans som servents que amos, en Matemàtiques.» Es a dir, som els servents de la Natura que preexisteix a nosaltres. El savi va en seguiment de la Natura, i ha de passar per on ella se l'enduu.

Màxim, pot escollir, entre les diverses qüestions que ella li proposa, les que convenen a son temperament.

Poincaré sembla no haver escollit. Ha arreglat sa activitat no segons els recursos de son esperit, sinó segons les mateixes necessitats de la Ciència.

Un estudi complet de l'obra de Poincaré és, doncs, un estudi complet de la Ciència contemporània; i aquest estudi ens portaria més enllà dels límits, massa curts, d'aquestes lliçons.

Ens cenyirem a l'estudi d'un sol gran problema, però que és el problema central de la Matemàtica moderna, ja que es pot dir que al seu voltant s'acoblen tots els altres.

Però, abans d'entrar en els detalls, permeteu-me de dir uns breus mots sobre la Filosofia científica de Poincaré en la mesura que interessa al nostre tema.

En Poincaré tenim la rara fortuna de saber el procés seguit per son esperit i, a l'ensems, el camí necessari de l'esperit humà en la invenció científica.

Donà una conferència, publicada en *Science et Méthode*, on ens conta ses observacions sobre el treball de sa pròpia pensa.

Llegim allí de quina manera ses principals descobertes s'han presentat en forma inesperada i fulminant.

La primera descoberta ressonant fou (tots ho sabem) la de les funcions fuchsianes. Poincaré ens explica com hagué d'esforçar-se durant llargues hores de treball, sense arribar a un resultat precís; i que després d'una nit de vetlla, el primer escaló bruscament es presentà.

El pas següent tingué lloc d'una manera molt més típica, en un viatge al Calvados, organitzat per l'Escola de Mines.

«Arribats a Coutences, pujàrem a un òmnibus per a no sé quina excursió. En el moment en què posava el peu damunt de l'estrep, em vingué la idea (sense que res, en mos pensaments anteriors, semblés haver-m'hi preparat) que les transformacions de què havia fet ús per a definir les funcions fuchsianes eren idèntiques a les de la geometria no euclidiana.

No vaig fer la comprovació: no hauria tingut temps, car, a penes assegut en l'òmnibus, reprenguí la conversa començada.» (*)

Així és com totes les altres parts d'aquesta gran descoberta es presentaren.

Molts matemàtics podrien aportar records semblants. Per ma part, puc especialment invocar-ne un, relatiu a una de mes primeres memòries. Estudiava el gènere de les funcions enteres, i tenia d'evaluar un determinant. Una nit em despertà un soroll exterior, i el determinant volgué deixar-se evaluar.

Què signifiquen, observacions de tal naturalesa? Demostren, evidentment, la influència del subconscient. Te-

(*) *Science et Méthode*, pàg. 51.

nim en el nostre esperit una sèrie de despatxos d'administració que treballen i que ens lliuren el resultat de llur treball.

Uns treballs secrets es fan en l'esperit, i, per un mecanisme encara misteriós, es presenten en circumstàncies imprevistes per la nostra consciència.

S'ha començat, d'uns quants anys ençà, a parlar de psicologia matemàtica. Els matemàtics han estat classificats en intuïtius i lògics, i Poincaré ha dedicat a aquest assumpte, unes planes admirables.

Es precís, no obstant, en mon concepte, no donar a aquesta distinció una valor massa absoluta. No li dono sinó una valor relativa, i no cal concedir-li una gran importància.

Tots els inventors són intuïtius, i, com ha dit Poincaré, no és possible inventar, només que amb pura lògica, combinant les regles lògiques, talment com no es pot jugar als escacs només que amb les regles del joc que indiquen la marxa de les peces.

No és mai únicament per l'acció del jo conscient que es fan descobertes. Fins en un Weierstrass, estiguem convençuts que la intuïció té una influència enorme, més o menys amagada; però el seu treball intuïtiu ha estat llargament revisat i ha rebut una adaptació particular abans d'ésser publicat.

En un Hermite o un Riemann, el treball de la intuïció ha sortit menys alterat, sense haver rebuda adaptació especial.

Es entre els intuïtius que hom troba els més grans inventors.

Però un gran perill sotja aquells la genial intuïció dels quals ho fa tot en les pregoneses de la subconsciència: és l'obscuritat. No els és fàcil de fer entendre als altres, quasi sense saber-ho, les idees de què són autors. Hi ha quelcom d'això en alguns dels geòmetres. Riemann és de lectura difícil. El mateix Cauchy té memòries de lectura quasi repulsiva. No teniu sinó veure, en el tractat de Serret, els teoremes clàssics de Cauchy (Serret en féu una còpia servil), i ens costarà de reconèixer els resultats tan meravellosos, sorprenents i elegants que estan en totes les memòries. Hermite era ben obscur quan parlava de les pròpies descobertes, talment com era clar parlant de les dels altres.

En presència d'una descoberta d'Hermite, em vénen ganes de dir:

—Admirable és veure com un ésser humà ha pogut arribar a una manera de pensar tan extraordinària!

Però, llegint una memòria de Poincaré, dic:

—¿Com és que no s'ha arribat més aviat a coses tan pregonament naturals i lògiques?

En les obres de Poincaré la idea resta palesa en algunes frases. I hom rep la impressió que tals idees són suficients per a reconstruir tot el raonament i desenrotllar tota la teoria.

Poincaré deu aquesta faisó ben especial a son esperit filosòfic.

Jo he conegut intuïtius a qui han calgut grans penes i treballs per a fer-se entendre, perquè el jo conscient comprenia migradament el resultat de la intuïció.

En Poincaré el caràcter intuïtiu resta disfressat: la Filosofia ha vigilat el jo conscient i ens presenta son treball.

Poincaré és un dels que ens han donat idees més pregones i meravelloses sobre la marxa de la Ciència. I és sobretot en l'estudi de les equacions diferencials que s'han manifestat en l'aspecte més característic.

Quan el Càlcul infinitesimal va fundar-se, triomfà fàcilment de tantes qüestions, que hom arribà a creure que les Matemàtiques estaven exhaurides.

Ben tost, però, hom s'adonà que s'havia errat, car, dominats uns obstacles, d'altres en sorgien.

Fou, sobretot, en el problema del càlcul integral, és a dir, la determinació d'una funció per ses propietats diferencials.

De primer antuvi, el sentit del mot *determinació* semblà clar. Hom veié que

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3};$$

és a dir, quan hom cercà la primitiva d'una funció ben coneguda i es trobà amb una funció també ben coneguda.

Aleshores s'expressen les integrals mitjançant l'arsenal de les funcions conegudes.

Però vingué el cas de

$$\int dx \sqrt{R(x)},$$

on R és un polinomi de quart grau: la integral no podia expressar-se mitjançant les funcions conegudes i es deia que la integració era *impossible*.

Aquesta circumstància, lluny de posar-se com una limitació del camp d'estudi de les quadratures, n'eixamplava els límits en introduir funcions noves.

Imaginem, per exemple, que no es coneguin sinó les quatre operacions fonamentals de l'Algebra, que solament siguin conegudes les funcions racionals.

Hom pot veure que la integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

on P i Q són polinomis, no podria en tots els casos expressar-se amb ajuda de les funcions racionals.

Es la funció logaritme que s'introdueix així.

Constatar que la integració de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ és *impossible* és inventar els logaritmes, a condició que es faci l'estudi de la nova transcendent $\int \frac{dx}{x}$ i es coneguin ses propietats.

I d'aquesta faisó una multitud de transcendents fou introduïda en l'Anàlisi; funcions noves que dilataven els camps dels nostres coneixements, que enriquien el nostre arsenal, i amb l'auxili de les quals era possible expressar les noves integrals i estudiar-les, amb la condició que llurs propietats, llurs relacions amb altres funcions, llurs mètodes de càlcul exacte c aproximat, etc., fossin suficientment coneguts.

Ningú millor que Poincaré (ja ho hem vist) ha analitzat la marxa de la Ciència, ni ningú ha enunciat pensaments més pregons sobre les condicions de son progrés.

Ço que precedeix pot fer compendre el sentit del següent, que figura en sa conferència del Congrés de Roma (1908): «Ja no hi ha problemes resolts i altres que no ho són: hi ha només problemes *més o menys* resolts.»

Això és ço que el principiant veu difícilment. El gran defecte de l'ensenyança elemental és el de donar una idea completament falsa, no exposant sinó els problemes perfectament resolts.

En aquesta perfecció ja s'hi poden descobrir alguns graus.

Si en un triangle cerco la relació segons la qual es divideixen les mitjanes, la conec exactament: és la de 1 a 2. Però, d'ençà de la geometria grega, aparegué que la diagonal del quadrat és incommensurable amb son costat: el coneixement que tenim de la relació d'aquestes dues quantitats és menys complet que l'anterior, car està representada per aquest nombre, ben fugitiu, que he d'obtenir per una infinitat d'operacions.

En les equacions algèbriques o numèriques les arrels poden ésser obtingudes per aproximacions successives, o exactament o per radicals.

El mot *solució* té accepcions pregonament diferents.

Els contemporanis de Leibniz no haurien considerat una funció com a coneguda sinó havent-la expressada mitjançant les funcions clàssiques. Això és tenir sobre la *resolució d'un problema* exigències exagerades.

Ben de pressa, per cert, hom caigué en l'excés contrari.

Poincaré cita l'exemple de Newton, qui comunicà a Leibniz un anagrama: *aaaaabbbeeeeii*... Ja calgué que Leibniz se'n preocupés força.

Volia dir: — Jo sé integrar totes les equacions diferencials; — és a dir, senzillament, que podia formar una sèrie de Taylor que formalment satisfeia a l'equació diferencial.

Els geòmetres moderns han arribat sovint a creure que s'havia resolt el problema quan s'havia demostrat l'existència de la solució.

Newton, en l'exemple precedent, no havia vist, o no havia volgut veure, tots els matisos que cal establir en l'apreciació d'una solució com la seva. S'ha de saber si la sèrie de potències és convergent, en quin domini, amb quina rapidesa convergeix, i com ens assabentarà de les propietats de la funció que representa.

El resultat que ell havia esbossat fou demostrat amb tota rigor per Cauchy. Aquest resultat resol el problema *localment*.

Donada una equació diferencial de primer ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

sabem per Cauchy, d'una manera rigorosa, que es pot trobar una solució tal que per a $x = x_0$, $y = y_0$. Es a dir que la corba que faig passar pel punt (x_0, y_0) ha d'admetre una tangent determinada per l'equació diferencial. De primera inspecció, aquesta, sense donar-nos a conèixer cap altre punt de la corba, ens fa conèixer aproximadament els punts *infinitament pròxims* a (x_0, y_0); és a dir, ens en dóna posicions tant més aproximades com més a la vora estan del primer.

El procediment de Newton, o, més ben dit, de Cauchy, permet, al contrari, conèixer exactament un tros determinat, *suficientment proper* a (x_0, y_0). El *més o menys* de Poincaré té aquí aplicació, i es veu, d'una banda, el pas capital així efectuat, però també fins a quin punt i amb quin relativisme es pot parlar de la solució de tal problema, mentre no es facin intervenir altres consideracions. Car de la funció a cercar no en tenim més que un coneixement fragmentari.

Fer la síntesi de les solucions locals és precisament el principal problema que s'ha proposat el càlcul infinitesimal, de Cauchy ençà.

La reunió de les solucions locals és difícil per una bona raó: les solucions són conegudes en alguns dominis i menys conegudes en altres.

Si x és una variable complexa, la solució és coneguda en un cercle, en l'interior del qual la nostra sèrie de MacLaurin és convergent. Podem fins obtenir un límit inferior del radi R d'aquest cercle. Però, si la sèrie convergeix més o menys lentament, el grau de rapidesa depèn de la raó $\frac{|x-x_0|}{R}$. De manera que la solució és tant més penosament coneguda en aquest domini com més petit és ell.

Aquesta dificultat es presenta d'una faisó diferent en el problema de les quadratures i en les equacions diferencials.

Per a les quadratures les coses s'esdevenen com en la carta d'un país. Els geodestes es separen en equips, i dibuixa cada un les triangulacions: no cal sinó enllaçar les xarxes per a obtenir la carta completa.

En les equacions diferencials és indispensable la prolongació analítica per a fer el càlcul de la solució en un punt exterior al cercle de convergència abans definit. S'hi arriba per una cadena de desenrotllaments que permeten el càlcul de la funció en punts de cada una de les àrees intermèdies.

Però no sabem, en general, si toparem amb radis de convergència més i més petits, o encara amb punts singulars que constitueixen, per a les operacions, un obstacle invencible.

Es com si, en les operacions geodèsiques, l'abast de les ulleres, la longitud de les cadenes, etc., fossin variables d'una manera desconeguda amb les operacions.

Hom veu com el problema està incompletament resolt, malgrat el coneixement de les solucions *locals*.

La teoria de les funcions analítiques, deguda també a Cauchy, és el primer mitjà pel qual s'ha pogut concebre, en el cas més senzill, el pas de la solució local a la general.

Un càlcul, per exemple, que permet afirmar que una funció és holomorfa entorn de tota valor finita o infinita de la variable, permet assegurar que és constant.

Aquesta teoria permet, així, fer deduccions fortament atrevides per passar a la solució general.

Ço que s'ha dit demostra com es posava el problema quan aparegué Poincaré.